

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗСІЮВАННЯ
ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ВІД БІОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ
ЗА ДОПОМОГОЮ Т-МАТРИЦЬ**

*Правда В. І., к.т.н., проф.; Богомолів М. Ф., к.т.н., доц.; Стародуб О. В.
КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна*

Математичне моделювання є найбільш загальним методом дослідження в науці, а самі математичні моделі в достатній мірі адекватно відображають і описують дослідний об'єкт, процес чи явище. Метою даної роботи є удосконалити математичну модель, яка дає можливість оцінити зміну інтенсивності оптичного випромінювання деякого шару біологічних об'єктів. Адже в медицині вплив клітини на розсіювання є одним з основних критеріїв визначення аналізу крові, при цьому розсіювання світла відбувається в основному за рахунок відбиття від поверхні еритроцитів. З метою вивчення впливу інтенсивності розсіювання світла застосовується метод Т-матриць. Метод Т-матриць був розроблений Вотерменом та Барбером і полягає у тому, що, використовуючи складені відображення полів, отримуємо відношення між коефіцієнтами розповсюдження для випадкових і розсіяних полів, вирази яких для зовнішньої розсіяної хвилі можна записати у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} E_{\theta} = H_{\varphi} &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr+i\omega t} \cos\varphi S_2(\theta), \\ -E_{\varphi} = H_{\theta} &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr+i\omega t} \sin\varphi S_1(\theta), \end{aligned} \quad (1)$$

де: x — дифракційний параметр частинки, який визначається як $x = \frac{k}{r}$, при $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, r — радіус частинки, λ — довжина хвилі.

Компоненти поля розсіяної радіації можуть бути представлені у вигляді суми окремих парціальних хвиль:

$$\begin{aligned} S_1(m, x, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n + 1}{n \cdot (n + 1)} \cdot (a_n \cdot \pi_n(\cos\theta) + b_n \cdot \tau_n(\cos\theta)), \\ S_2(m, x, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n + 1}{n \cdot (n + 1)} \cdot (b_n \cdot \pi_n(\cos\theta) + a_n \cdot \tau_n(\cos\theta)), \end{aligned} \quad (2)$$

де: θ — кут розсіювання, визначається направленням падаючих хвиль, центром розсіювання й напрямком спостереження.

Для визначення інтенсивності розсіювання використовується наступна формула:

$$I = (S_1)^2 + (S_2)^2 \quad (3)$$

Вирази для коефіцієнтів розсіяних хвиль a_n і b_n [2]:

$$a_n = \frac{\Psi_n(x)\Psi_n'(mx) - m\Psi_n(mx)\Psi_n'(x)}{\zeta_n(x)\Psi_n'(mx) - m\Psi_n(mx)\zeta_n'(x)}, \quad (4)$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(x)\psi_n'(mx) - \psi_n(mx)\psi_n'(x)}{m\zeta_n(x)\psi_n'(mx) - \psi_n(mx)\zeta_n'(x)}, \quad (5)$$

де: n – номер парціальної хвилі; Ψ_n, ξ_n та Ψ_n', ξ_n' – відповідно функції Ріккати–Бесселя, Ріккати–Ханкеля першого роду і їх похідні.

Необхідно відмітити, x – дифракційний параметр частинки; m – її комплексний відносний показник заломлення, який записується у вигляді :

$$m = n + i\chi, \quad (6)$$

де: n — дійсна частина показника заломлення, χ — уявна частина показника заломлення. У вікні прозорості крові $n = 1.037 \dots 1.055$, а $\chi = 10^{-5} \dots 10^{-4}$.

Для обчислення функцій Ψ_n та ξ_n і їх похідних користуються відомими рекурентними співвідношеннями [3]:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} \Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x), \\ \xi_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} \xi_n(x) - \xi_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Далі розраховано коефіцієнти π_n і τ_n , які виражені через поліноми Лежандра та їхні похідні:

$$\begin{aligned} \pi_n(\mu) &= \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \\ \tau_n(\mu) &= \mu \cdot \pi_n(\mu) - (1-\mu^2) \cdot \frac{d}{d\mu} \pi_n(\mu) \\ -1 &\leq \mu \leq 1 \\ P_n(\mu) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \end{aligned}, \quad (8)$$

де: $P_n(\mu)$ — поліноми Лежандра цілого порядку n від дійсного аргументу, $\mu = \cos\theta$.

На основі математичної моделі було розраховано інтенсивність розсіювання світла в залежності від наступних вхідних даних: довжина хвилі $\lambda = 400 \dots 1060$ нм, кут розсіяння $\theta = 10^\circ - 90^\circ$, радіус еритроцита $r = 4$ мкм, показник заломлення $m = 1.055 + i \cdot 10^{-5}$, використовуючи формулу (3).

Наведено табл. 1 зі обрахованими значеннями інтенсивності розсіювання світла в залежності від кута розсіяння та довжини хвилі.

Отримані результати графічно проілюстровано на рис.1 за допомогою інженерної програми Mathcad.

Проведені дослідження дають можливість отримати інтенсивність розсіювання в залежності від довжини хвилі, радіуса еритроцита, відбиття розсіювання, що дає оцінити зміну інтенсивності оптичного випромінювання деякого шару біологічного об'єкта – еритроцита. Нормальний еритроцит людини в спокої має двоввігнуту дискоїдну форму («дискоцит»). В експериментальних умовах і при патології еритроцити можуть перетворюватися

Таблиця 1

λ \ θ	400 нм	457 нм	514 нм	594 нм	612 нм	647 нм	760 нм	840 нм	914 нм	1040 нм
10°	18.32	0.003	0.007	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003
20°	109.61	29.15	304.7	122.7	256.1	547.6	648.2	87.13	376.9	623.01
30°	49.33	301.97	515.7	427.5	179.9	354.1	208.02	166.1	137.8	44.15
40°	8.32	3.03	23.26	14.3	5.37	59.48	75.9	1.48	2.67	112.9
50°	12.87	70.99	98.72	100.9	40.25	60.99	25.98	41.17	62.6	28.28
60°	3.73	3.99	3.27	8.44	0.63	7.55	12.13	0.9	0.36	34.67
70°	4.09	26.13	32.43	35.99	15.82	17.82	5.69	15.45	16.85	12.03
80°	3.23	6.99	6.52	11.29	2.59	1.52	2.3	2.95	4.37	13.72
90°	1.38	11.12	13.35	14.54	7.03	7.6	2.81	6.46	3.46	2.31

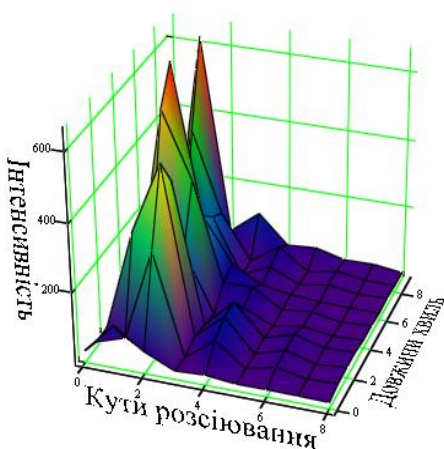


Рисунок 1. Інтенсивність розсіювання лазерного випромінювання

в ехіноцити (поверхня покривається шипами), стомацити (односторонньо увігнутий диск), сфероцити та ін. без зміни об'єму. Тобто можна розрізняти патологічні та нормальні еритроцити, що дозволяє на ранніх стадіях швидко та якісно діагностувати такі захворювання як гемолітична анемія, септицемія, синдром ДВС.

Інтенсивність розсіювання зменшується при збільшенні кута розсіювання θ , що відповідає теоретичним даним.

Перелік посилань

1. Рысаков В., Стонь М. Рассеяние света взвесью частиц: IV. Предельные возможности и определения параметров взвесей методом рассеяния света // Оптика и спектр. — 1997. — Т. №82. №2. — С. 305-309.
2. Annika M.K. Nilsson, Peter Alsholm, Anders Karlsson and Stefan Andersson-Engels «T-matrix computations of light scattering by red blood cells», Sweden. — 2001. — p.27.
3. Michael I. Mishenko, Larry D. Travis «Capabilities and limitations of a current fortran implementation of the T-matrix method for randomly oriented, rotational symmetric scatterers», NY. — 1998. — p.16.

Анотація

В даній роботі розроблена математична модель взаємодії лазерного випромінювання з біологічними об'єктами на основі методу Т-матриць.

Ключові слова: математична модель, метод Т-матриць.

Аннотация

В данной работе разработана математическая модель взаимодействия лазерного излучения с биологическими объектами на основе метода Т-матриц.

Ключевые слова: математическая модель, метод Т-матриц.

Abstract

In this work a mathematical model of the interaction of laser radiation with biological objects is developed on the basis of the T-matrix method.

Keywords: mathematical model, T-matrix method.