ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ CORDIC-АЛГОРИТМА

Шпилька Ю. Н.; Душко А. А.; Шпилька А. А., к.т.н.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», Киев, Украина

Алгоритм CORDIC представляет собой итерационную процедуру для выполнения операции поворота вектора на плоскости на произвольный угол, используя только операции сдвига и сложения [1].

В общем виде одноразовый поворот вектора (x_0, y_0) на угол α определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cdot \cos\alpha - y_0 \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \left(x_0 - y_0 \tan\alpha\right), \\ y &= x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \left(x_0 \tan\alpha + y_0\right). \end{aligned} \qquad (1)$$

Если α примет такие значения, что $\tan\alpha = 2^{-i}$, то умножение на $\tan\alpha$ может быть выполнено с помощью сдвига вправо на i разрядов, где $i = 0,1,2,...,n-1$. Таким образом, представив произвольный угол φ через суму углов $\alpha_i = \sigma_i \cdot \arctan(2^{-i})$, выражения (1) можно представить:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \cos(\sigma_i \cdot \alpha_i) \cdot \left(x_i - y_i \tan(\sigma_i \cdot \alpha_i)\right); \\ y_{i+1} &= \cos(\sigma_i \cdot \alpha_i) \cdot \left(x_i \tan(\sigma_i \cdot \alpha_i) + y_i\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\sigma_i \in \{-1,+1\}$ обозначает знак, с которым угол α_i входит в сумму углов, для получения произвольного угла φ. Учитывая, что $\cos(-\alpha_i) = \cos(\alpha_i) = K_i$ и $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$, то выражения (2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= K_i \cdot \left(x_i - \sigma_i \cdot y_i \cdot 2^{-i}\right); \\ y_{i+1} &= K_i \cdot \left(\sigma_i \cdot x_i \cdot 2^{-i} + y_i\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

Поскольку углы α_i однозначно определенны, то K_i является константой в независимости от произвольного угла φ, и носит название коэффициента деформации вектора при повороте на угол α_i. Произведение коэффициентов деформации для всех итераций вращения является сходящейся величиной и дает суммарное сжатие вектора в $K = \prod_{i=0}^{n-1} K_i = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2\cdot i}}} = 0,607$ раз.

Исключая коэффициенты деформации K_i в (3), CORDIC-алгоритм для расчета значения синуса и косинуса произвольного угла φ имеет вид [2]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_i = sign(z_i);\\
&z_{i+1} = z_i - \sigma_i \cdot \alpha_i;\\
&x_{i+1} = x_i - \sigma_i \cdot y_i \cdot 2^{-i};\\
&y_{i+1} = \sigma_i \cdot x_i \cdot 2^{-i} + y_i,
\end{aligned} \tag{4}$$

где z_i — описывает разность между заданным углом φ и углом, на который повернулся заданный вектор $\{x_0, y_0\}$, в результате проведения i итераций. При увеличении i, разность z_i стремится к 0.

Таким образом, выбирая в качестве начальных данных $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и $z_0 = \varphi$, после выполнения *n* итераций поворота вектора, получим в результате значения: $x_n = \frac{\cos(\varphi)}{K}$ и $y_n = \frac{\sin(\varphi)}{K}$. Для получения точного значения необходимо умножить полученные данные на K. Другой вариант реализации заключается в подстановке в качестве начальных условий $x_0 = K$.

Рассмотрим одну итерацию алгоритма (4), когда вектор $\{0,909; 0,303\}$ нужно повернуть на угол $\alpha_2 = -\arctan(2^{-2})$, в результате получаем вектор $\{0,984; 0,076\}$. Для реализации алгоритма (4) на FPGA используют арифметику с фиксированной запятой разрядности M. В 10 разрядном знаковом формате с фиксированной запятой, вектора $\{0,984; 0,076\}$ и $\{0,909; 0,303\}$ представляется в виде целых чисел $\{503,38\}$ и $\{465,155\}$ соответственно. Произведем вычисление этой же итерации в 10 разрядной арифметике с фиксированной запятой:

$$x_3 = 465 + 155 \cdot 2^{-2} = 465 + \lfloor 38,75 \rfloor = 503;$$

$$y_3 = 155 - 465 \cdot 2^{-2} = 155 - \lfloor 116,25 \rfloor = 39.$$

Как видно, в результате округления во время вычислении y_3 возникла ошибка, которая будет накапливаться со следующими ошибками такого же рода. Интуитивно понятно, что бы избавится от подобных ошибок необходимо сначала производить операцию сложение/вычитание, а потом операцию сдвига (деления). Модифицировать алгоритм (4) таким образом можно, если вынести за скобки множитель 2^{-i}:

$$\begin{aligned}
&x_{i+1} = (x_i \cdot 2^i - \sigma_i \cdot y_i) \cdot 2^{-i};\\
&y_{i+1} = (\sigma_i \cdot x_i + y_i \cdot 2^i) \cdot 2^{-i}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Используя полученные выражения (5), проведем поворот вектора $\{465,155\}$ на угол $\alpha_2 = -\arctan(2^{-2})$:

$$x_3 = (465 \cdot 2^2 + 155) \cdot 2^{-2} = 2015 \cdot 2^{-2} = \lfloor 503,75 \rfloor = 503;$$

$$y_3 = (-465 + 155 \cdot 2^2) \cdot 2^{-2} = 155 \cdot 2^{-2} = \lfloor 38.75 \rfloor = 38.$$

Таким образом, в модифицированном CORDIC-алгоритме (5) отсутствуют ошибки такого рода.

На рис. 1 показаны зависимости СКО значений от их разрядности M, которые получены в результате математического моделирования на одном периоде гармонического колебания CORDIC-алгоритмом с предложенными изменениями (5) и известным CORDIC-алгоритмом (4) .

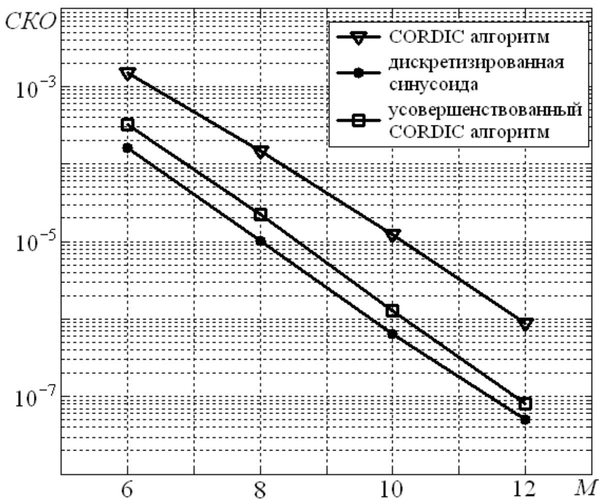

Рисунок 1. Среднеквадратическое отклонение рассчитанных значений

Как видно из результатов моделирования, применение предложенного изменение в алгоритме позволяет получить точность в 5-10 раз лучше, чем с помощью алгоритма (4). Повышение точности достигается за счет увеличения разрядности вычислений, при этом разрядность результатов не меняется. Для сравнения на рис. 1 приведена зависимость СКО значений дискретной синусоиды от ее разрядности M, которая является потенциально достижимой.

Литература

1. Dawid H. Digital signal procesing for multimedia systems: CORDIC algorithm and architectures. Chapter 24/ H. Dawid and H. Mayer. — New York: Marcel Dekker, 1999.

2. Захаров А. В. Алгоритмы CORDIC. Современное состояние и перспективы / А. В. Захаров, В. М. Хачумов // Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения». — Переславль-Залесский, 2004. — Т.1. — С. 353—372

Анотація

Проведено аналіз та запропоновано спосіб підвищення точності CORDIC алгоритму. Шляхом математичного моделювання оцінено середньоквадратичні відхилення результатів розрахунку значень синуса і косинуса запропонованим та оригінальним алгоритмами.

Ключові слова: CORDIC-алгоритм, середньоквадратичне відхилення, FPGA.

Аннотация

Проведено анализ и предложен способ повышения точности CORDIC-алгоритма. Путем математического моделирования проведено оценку среднеквадратического отклонения результатов расчета значений синуса и косинуса предложенным и оригинальным алгоритмами.

Ключевые слова: CORDIC-алгоритм, среднеквадратическое отклонение, FPGA.

Abstract

The analysis is performed and method for increasing the accuracy of CORDIC-algorithm is proposed. Estimation calculation results of the standard deviation values of the sine and cosine of the original and proposed algorithms is given by mathematical modeling.

Keywords: CORDIC-algorithm, standard deviation, FPGA.