ТЕОРИЯ МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ СИНУСОИДАЛЬНОГО РЕЖИМА ТРЕХФАЗНОЙ ЧЕТЫРЕХПРОВОДНОЙ ЦЕПИ В СИММЕТРИЧНЫХ КООРДИНАТАХ

Артеменко М. Е., доктор технических наук, профессор
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», Киев, Украина

Синусоидальный процесс в сечении трехфазной четырехпроводной цепи полностью задается трехкоординатными векторами мгновенных значений фазных напряжений и токов

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{Vmatrix}u_A(t)\\u_B(t)\\u_C(t)\end{Vmatrix}=\sqrt{2}\begin{Vmatrix}U_A\cos(\omega t+\varphi_A)\\U_B\cos(\omega t+\varphi_B)\\U_C\cos(\omega t+\varphi_C)\end{Vmatrix};\boldsymbol{i}(t)=\begin{Vmatrix}i_A(t)\\i_B(t)\\i_C(t)\end{Vmatrix}=\sqrt{2}\begin{Vmatrix}I_A\cos(\omega t+\psi_A)\\I_B\cos(\omega t+\psi_B)\\I_C\cos(\omega t+\psi_C)\end{Vmatrix}.$$

Мгновенные скалярная и векторная мощности равны, соответственно,

$$p(t)=\boldsymbol{u}(t)^T\boldsymbol{i}(t)=u_A(t)i_A(t)+u_B(t)i_B(t)+u_C(t)i_C(t);\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{i}(t)\times\boldsymbol{u}(t)=\begin{Vmatrix}i_B(t)u_C(t)-i_C(t)u_B(t)\\i_C(t)u_A(t)-i_A(t)u_C(t)\\i_A(t)u_B(t)-i_B(t)u_A(t)\end{Vmatrix},$$

где T — знак транспонирования, × — знак векторного умножения. На основе этих понятий в рамках так называемой pq-теории мгновенной мощности [1] и ее модификаций были разработаны эффективные алгоритмы управления силовыми активными фильтрами, исключающие неактивные составляющие тока трехфазного источника.

В то же время теория мгновенной мощности не получила единодушного одобрения специалистов, поскольку в ней не находили полного воплощения классические интегральные характеристики мощности. В работе [2] эти противоречия были сняты для синусоидального режима трехфазной цепи. Была установлены новые аналитические выражения для мгновенных мощностей

$$p(t)=\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{u}}^T\bar{\boldsymbol{i}}^*+e^{j2\omega t}\bar{\boldsymbol{u}}^T\bar{\boldsymbol{i}});\boldsymbol{q}(t)=\mathrm{Re}(\bar{\boldsymbol{i}}\times\bar{\boldsymbol{u}}^*+e^{j2\omega t}\bar{\boldsymbol{i}}\times\bar{\boldsymbol{u}}),\tag{1}$$

где $\bar{\boldsymbol{u}}=\begin{Vmatrix}U_Ae^{j\varphi_A}\\U_Be^{j\varphi_B}\\U_Ce^{j\varphi_C}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot{U}_A\\\dot{U}_B\\\dot{U}_C\end{Vmatrix};\bar{\boldsymbol{i}}=\begin{Vmatrix}I_Ae^{j\psi_A}\\I_Be^{j\psi_B}\\I_Ce^{j\psi_C}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot{I}_A\\\dot{I}_B\\\dot{I}_C\end{Vmatrix}$ — комплексные векторы действующих значений фазных напряжений и токов, однозначно связанные с векторами $\mathbf{u}(t),\mathbf{i}(t)$; * — знак комплексного сопряжения.

Каждое из скалярных и векторных произведений комплексных векторов действующих значений фазных токов и напряжений выражения (1) определяет соответствующую комплексную мощность [2]:

$\dot{S} = \bar{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{i}}^* = P + jQ$ — стандартная комплексная мощность, действительная часть которой есть активная мощность, мнимая часть - реактивная мощность; $\dot{N} = \dot{\boldsymbol{u}}^T \dot{\boldsymbol{i}}$ — комплексная мощность пульсаций; $\bar{\boldsymbol{s}} = \bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{u}}^*$ — вектор комплексной непульсирующей мощности; $\bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{u}}$ — вектор комплексной мощности небаланса.

На основании свойств определителя комплексной матрицы Грама справедливы два разложения полной (кажущейся) мощности по Бухгольцу $B = \sqrt{(\bar{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{u}}^*)(\bar{\boldsymbol{i}}^T \bar{\boldsymbol{i}}^*)}$ на квадратичные составляющие [2]:

$$\begin{aligned} B^2 &= \dot{S}S^* + \bar{\boldsymbol{n}}^T \bar{\boldsymbol{n}}^* = P^2 + Q^2 + D^2; \\ B^2 &= \bar{\boldsymbol{s}}^T \bar{\boldsymbol{s}}^* + \dot{N}N^*, \end{aligned} \tag{2}$$

где $D = \sqrt{\bar{\boldsymbol{n}}^T \bar{\boldsymbol{n}}^*}$ — мощность небаланса.

Целью настоящей работы является вывод аналитических выражений для представления введенных комплексных мощностей в базисе симметричных координат. Введем орты нулевой, прямой и обратной последовательности [2]

$$\bar{\boldsymbol{e}}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix}; \bar{\boldsymbol{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}1\\\tilde{a}\\\dot{a}\end{Vmatrix}; \bar{\boldsymbol{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}1\\\dot{a}\\\tilde{a}\end{Vmatrix}; \dot{a} = e^{j2\pi/3}; \tilde{a} = e^{-j2\pi/3}$$

и разложим по ним комплексные векторы действующих значений

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \dot{U}_0 \bar{\boldsymbol{e}}_0 + \dot{U}_+ \bar{\boldsymbol{e}}_+ + \dot{U}_- \bar{\boldsymbol{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \tilde{a} & \dot{a}\\ 1 & \dot{a} & \tilde{a}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot{U}_0\\ \dot{U}_+\\ \dot{U}_-\end{Vmatrix} = \bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{u}}; \bar{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{i}};$$

где $\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \tilde{a} & \dot{a}\\ 1 & \dot{a} & \tilde{a}\end{Vmatrix}$ — модифицированная матрица Fortesque, удовлетворяющая условиям $\bar{\boldsymbol{F}}^{-1} = \bar{\boldsymbol{F}}^*; \bar{\boldsymbol{F}}^T = \bar{\boldsymbol{F}}; \underline{\boldsymbol{u}} = \begin{Vmatrix}\dot{U}_0\\ \dot{U}_+\\ \dot{U}_-\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}U_0 e^{j\varphi_0}\\ U_+ e^{j\varphi_+}\\ U_- e^{j\varphi_-}\end{Vmatrix}$ и $\underline{\boldsymbol{i}} = \begin{Vmatrix}\dot{I}_0\\ \dot{I}_+\\ \dot{I}_-\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}I_0 e^{j\psi_0}\\ I_+ e^{j\psi_+}\\ I_- e^{j\psi_-}\end{Vmatrix}$ комплексные векторы действующих значений симметричных составляющих напряжения и тока.

В симметричных координатах скалярные и векторные произведения, определяющие комплексные мощности, имеют вид

$$\bar{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{i}} = (\bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{u}})^T \bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{i}} = \underline{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{F}}^T \bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{i}} = \underline{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{F}}^2 \underline{\boldsymbol{i}} = \underline{\boldsymbol{u}}^T \underline{\boldsymbol{i}}_F ; \bar{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{i}}^* = (\bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{u}})^T (\bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{i}})^* = \underline{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{F}}^T \bar{\boldsymbol{F}}^* \underline{\boldsymbol{i}}^* = \underline{\boldsymbol{u}}^T \underline{\boldsymbol{i}}^*;$$

$$\bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{i}}) \times (\bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{u}}) = \bar{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{i}} \times \underline{\boldsymbol{u}}); \bar{\boldsymbol{i}} \times \bar{\boldsymbol{u}}^* = (\bar{\boldsymbol{F}}\underline{\boldsymbol{i}}) \times (\bar{\boldsymbol{F}}^* \underline{\boldsymbol{u}}^*) = \bar{\boldsymbol{F}}^{-1}(\bar{\boldsymbol{F}}^2 \underline{\boldsymbol{i}} \times \underline{\boldsymbol{u}}^*) = \bar{\boldsymbol{F}}^*(\underline{\boldsymbol{i}}_F \times \underline{\boldsymbol{u}}^*),$$

где $\underline{\boldsymbol{i}}_F = \bar{\boldsymbol{F}}^2 \underline{\boldsymbol{i}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_+ \\ \dot{I}_- \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_- \\ \dot{I}_+ \end{Vmatrix}.$

На основании этих формул скалярные комплексные мощности и модули векторных комплексных мощностей описываются выражениями

$$\dot{N} = \underline{\boldsymbol{u}}^T \underline{\boldsymbol{i}}_F = \dot{U}_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_+ \dot{I}_- + \dot{U}_- \dot{I}_+ ; \dot{S} = \underline{\boldsymbol{u}}^T \underline{\boldsymbol{i}}^* = \dot{U}_0 \tilde{I}_0 + \dot{U}_+ \tilde{I}_+ + \dot{U}_- \tilde{I}_- ;$$

$$\bar{\boldsymbol{n}}^T \bar{\boldsymbol{n}}^* = (\underline{\boldsymbol{i}} \times \underline{\boldsymbol{u}})^T \bar{\boldsymbol{F}}^T \bar{\boldsymbol{F}}^* (\underline{\boldsymbol{i}} \times \underline{\boldsymbol{u}})^* = (\underline{\boldsymbol{i}} \times \underline{\boldsymbol{u}})^T (\underline{\boldsymbol{i}} \times \underline{\boldsymbol{u}})^*; \quad (3)$$

$$\bar{\boldsymbol{s}}^T \bar{\boldsymbol{s}}^* = (\underline{\boldsymbol{i}}_F \times \underline{\boldsymbol{u}}^*)^T \bar{\boldsymbol{F}}^T \bar{\boldsymbol{F}} (\underline{\boldsymbol{i}}_F \times \underline{\boldsymbol{u}}^*)^* = (\underline{\boldsymbol{i}}_F \times \underline{\boldsymbol{u}}^*)^T (\underline{\boldsymbol{i}}_F \times \underline{\boldsymbol{u}}^*)^*.$$

Первые два выражения (3) известны достаточно давно [3], что косвенно подтверждает корректность применяемой методики. С учетом соотношений $(\bar{\boldsymbol{u}}^T \bar{\boldsymbol{u}}^*)(\bar{\boldsymbol{i}}^T \bar{\boldsymbol{i}}^*) = (\underline{\boldsymbol{u}}^T \underline{\boldsymbol{u}}^*)(\underline{\boldsymbol{i}}^T \underline{\boldsymbol{i}}^*) = (\underline{\boldsymbol{u}}^T \underline{\boldsymbol{u}}^*)(\underline{\boldsymbol{i}}_F{}^T \underline{\boldsymbol{i}}_F{}^*)$ несложно убедиться в справедливости разложений (2) при использовании симметричных координат.

Литература

1. Akagi H. Instantaneous power theory and applications to power conditioning / H. Akagi, E. H. Watanable, M. Aredes — Piscataway, NJ: IEEE Press. — 2007. — 379 p.
2. Сиротин Ю. А. Векторная мгновенная мощность и энергетические режимы трехфазных цепей / Ю. А. Сиротин // Технічна електродинаміка. — 2013. — №6. — С. 57—65.
3. Шидловский А. К. Повышение качества энергии в электрических сетях / А. К. Шидловский, В. Г. Кузнецов — К. : Наук. думка. — 1985. — 268 с.

Анотація

Представлена теорія миттєвої потужності трифазного чотирипровідного кола в синусоїдному несиметричному режимі та показаний її зв'язок з класичними інтегральними характеристиками потужності. Виведено аналітичні вирази для комплексних векторних потужностей в базисі симетричних координат фазних струмів і напруг.

Ключові слова: теорія миттєвої потужності, симетричні координати.

Аннотация

Представлена теория мгновенной мощности трехфазной четырехпроводной цепи в синусоидальном несимметричном режиме и показана ее связь с классическими интегральными характеристиками мощности. Выведены аналитические выражения для комплексных векторных мощностей в базисе симметричных координат фазных токов и напряжений.

Ключевые слова: теория мгновенной мощности, симметричные координаты.

Abstract

The theory of instantaneous power for three-phase four-wire circuit in sinusoidal mode was presented and its connection with the classical integral power characteristics was shown. The analytic expressions for complex vector powers in the basis of symmetric coordinates of phase currents and voltages were derived.

Keywords: theory of instantaneous power, symmetric coordinates.